Επαναληπτικό θέμα στην ανάλυση

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f'(x)=1+f^2(x)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,3) και την αρχή των αξόνων, τότε:

1. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ και στη συνέχεια να λύσετε τις ανισώσεις $f(x)>0$ και $f(x)<0$, $x\in\mathbb{R}$.
2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi_1\in(0,1)$ ώστε $f(\xi_1)=1$.
3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στην αρχή των αξόνων και να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{2}.f'(x)\geq f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

4. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi,f(\xi))$ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τη χορδή ΟΑ της C_f.
5. Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει :

$$\frac{1}{2}f''(x)=f(x)+f^3(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} .$$

6. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
7. Για κάθε α>0, β>0 δείξτε ότι : $2.f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\leq f(\alpha)+f(\beta)$ (2)
8. Να υπολογίσετε τα όρια i . $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2.f(x)]$.
9. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1[2x+f^2(x)]dx$.
10. Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες xx΄,yy΄ και την ευθεία x=1, να δείξετε ότι: $E\leq\frac{3}{2}$.

Απαντήσεις

Από τα δεδομένα έχουμε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) και το σημείο Α(1,3).

Άρα $f(0)=0$ και $f(1)=3$

1. Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $1+f^2(x)>0$, τότε λόγω της (1) είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Άρα η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0)=0$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την x=0.

$$f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>f(0) \Leftrightarrow x>0$$

$$f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(0) \Leftrightarrow x<0$$

2. Η **f** είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη σ' αυτό, άρα θα είναι συνεχής και στο $[0,1]\subseteq\mathbb{R}$.

Επειδή $f(0)<1<f(1)$,τότε λόγω θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(0,1)$ ώστε $f(\xi_1)=1$.

Το ξ_1 είναι μοναδικό διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1].

3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στην αρχή των αξόνων που ανήκει στη C_f είναι:

ε: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.Όμως η (1) για $x=0 \Rightarrow f'(0)=1+f^2(0)=1+0=1$ τότε ε: y=x

Τώρα θα δείξουμε ότι: $\frac{1}{2}f'(x) \geq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1}{2}\,[\,1+f^2(x)\,] \geq f(x) \Leftrightarrow 1+f^2(x) \geq 2f(x) \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x)+1 \geq 0 \Leftrightarrow [\,f(x)-1\,]^2 \geq 0$ που ισχύει.

4. Η χορδή ΟΑ έχει εξίσωση : $y=\lambda x$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$ τότε $3=\lambda.1 \Rightarrow \lambda=3$ οπότε $\lambda_{OA}=3$.
Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα [0,1].

$$\text{Άρα υπάρχει } \xi \in (0,1) \text{ ώστε } f'(\xi) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{3-0}{1} = 3 = \lambda_{OA}$$

οπότε η **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι **παράλληλη** προς τη χορδή ΟΑ.

5. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε και η συνάρτηση $1+f^2(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x)=2f(x).f'(x)$ η οποία λόγω της (1) γίνεται:

$$f''(x)=2f(x).[\,1+f^2(x)] \Leftrightarrow \frac{1}{2}f''(x)=f(x)+f^3(x),\ x \in \mathbb{R}$$

6. Επειδή $f''(x)=2f(x).[\,1+f^2(x)]$ (3) $x \in \mathbb{R}$ και $1+f^2(x)>0$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $f''(x)=0 \overset{(3)}{\Rightarrow} f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$$f''(x)>0 \overset{(3)}{\Rightarrow} f(x)>0 \Leftrightarrow x>0 \text{ , άρα η f είναι κυρτή στο } [0,+\infty)$$

$$f''(x)<0 \overset{(3)}{\Rightarrow} f(x)<0 \Leftrightarrow x<0 \text{ , άρα η f είναι κοίλη στο } (-\infty,0]$$

Επομένως η f παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $x=0$

7. i. Για $\alpha=\beta$ η σχέση (2) προφανώς ισχύει ως ισότητα .

ii. Για $\alpha \neq \beta$ π.χ $\alpha<\beta$ τότε $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[\,\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\,]$ και $[\,\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\,]$ άρα υπάρχουν

$$\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ με } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$\text{και } \xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) \text{ με } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ οπότε $\xi_1<\xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Leftrightarrow$

$$\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ επειδή και } \frac{\beta-\alpha}{2}>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha) < f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha)+f(\beta)$$

Έτσι για κάθε $\alpha>0$,$\beta>0$ ισχύει : $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq f(\alpha)+f(\beta)$

8. i. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+f^2(x)}{1}=1+f^2(0)=1+0=1$

ii. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2.f\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x.\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x.\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ θέτω $\frac{1}{x}=u$ άρα $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2.f\left(\frac{1}{x}\right)\right]=(+\infty).\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=(+\infty).1=+\infty$.

9. $I=\int_0^1[2x+f^2(x)].dx$ επειδή $f'(x)=1+f^2(x)$ τότε

$$\int_0^1[2x+f'(x)-1].dx=[x^2+f(x)-x]_0^1=1^1+f(1)-1-(0^2+f(0)-0)=1+3-1-(0+0-0)=3\Rightarrow I=3$$

10. Είναι $E=\int_0^1|f(x)|.dx$

Επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ τότε $E=\int_0^1 f(x).dx$ όμως δείξαμε ότι $\frac{1}{2}f'(x)\geq f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}f'(x)-f(x)\geq 0 \text{ για } x\in[0,1]$$

Τότε και $\int_0^1[\frac{1}{2}f'(x)-f(x)]dx\geq 0\Leftrightarrow\int_0^1\frac{1}{2}f'(x)dx-\int_0^1 f(x)dx\geq 0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx\geq\int_0^1 f(x)dx\Leftrightarrow E\leq\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx\Leftrightarrow$

$$E\leq\frac{1}{2}[f(x)]_0^1\Leftrightarrow E\leq\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]\Leftrightarrow E\leq\frac{1}{2}(3-0)\Leftrightarrow E\leq\frac{3}{2}.$$